

## ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ (ПФ)

### Определения:

I. Прямое ПФ:

$$F(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy \Leftrightarrow F(\xi, \eta) = \hat{\mathcal{F}}\{f(x, y)\}$$

II. Обратное ПФ:

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \Leftrightarrow f(x, y) = \hat{\mathcal{F}}^{-1}\{F(\xi, \eta)\}$$

III. Свертка:

$$f_1(x, y) \otimes f_2(x, y) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(p, q) f_2(x - p, y - q) dp dq$$

IV. Корреляция:

$$f_1(x, y) \odot f_2(x, y) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(p, q) f_2^*(p - x, q - y) dp dq$$

### Свойства:

1. Теорема линейности:

$$\text{Если } F_i(\xi, \eta) = \hat{\mathcal{F}}\{f_i(x, y)\}, \text{ то } \hat{\mathcal{F}}\left\{\sum_i c_i f_i(x, y)\right\} = \sum_i c_i F_i(\xi, \eta)$$

2. Теорема подобия:

$$\text{Если } F(\xi, \eta) = \hat{\mathcal{F}}\{f(x, y)\}, \text{ то } \hat{\mathcal{F}}\{f(ax, by)\} = \frac{1}{ab} F\left(\frac{\xi}{a}, \frac{\eta}{b}\right)$$

3. Теорема смещения:

$$\text{Если } F(\xi, \eta) = \hat{\mathcal{F}}\{f(x, y)\}, \text{ то } \hat{\mathcal{F}}\{f(x - x_0, y - y_0)\} = F(\xi, \eta) e^{-i(\xi x_0 + \eta y_0)}$$

4. Теорема Парсеваля:

$$\text{Если } F(\xi, \eta) = \hat{\mathcal{F}}\{f(x, y)\}, \text{ то } (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta$$

5. Теорема свертки:

$$\text{Если } F_i(\xi, \eta) = \hat{\mathcal{F}}\{f_i(x, y)\} (i = 1, 2), \text{ то } \hat{\mathcal{F}}\{f_1(x, y) \otimes f_2(x, y)\} = F_1(\xi, \eta) \cdot F_2(\xi, \eta)$$

$$\text{Обратная: } \hat{\mathcal{F}}\{f_1(x, y) f_2(x, y)\} = \frac{1}{(2\pi)^2} F_1(\xi, \eta) \otimes F_2(\xi, \eta)$$

6. Теорема взаимной корреляции:

Если  $F_i(\xi, \eta) = \hat{\mathcal{F}}\{f_i(x, y)\} (i=1,2)$ , то  $\hat{\mathcal{F}}\{f_1(x, y) \otimes f_2(x, y)\} = F_1(\xi, \eta) \cdot F_2^*(\xi, \eta)$

Автокорреляция:  $\hat{\mathcal{F}}\{f(x, y) \otimes f(x, y)\} = |F(\xi, \eta)|^2$

7. Свойства симметрии:

Если  $f(x, y) = f^*(x, y)$ , то  $F(\xi, \eta) = F^*(-\xi, -\eta)$

Следствия:

а). Если  $f(x, y)$  – действительная и четная, то  $F(\xi, \eta)$  тоже действ. и четная;

б). Если  $f(x, y)$  – действительная и нечетная, то  $F(\xi, \eta)$  – мнимая и нечетная.

### ФУРЬЕ-ОБРАЗЫ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

$f(x)$	$F(\xi)$
$\delta(x)$	1
1	$2\pi\delta(\xi)$
$\sin \xi_0 x$	$-i\pi[\delta(\xi - \xi_0) - \delta(\xi + \xi_0)]$
$\cos \xi_0 x$	$i\pi[\delta(\xi - \xi_0) + \delta(\xi + \xi_0)]$
$\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)$	$a\sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{1}{4}\xi^2 a^2\right)$
$\text{rect}(x a)$	$a \text{sinc}\left(\frac{1}{2}\xi a\right)$
$\text{sgn } x$	$-\frac{2i}{\xi}$