Лекция 7
Статистическое описание случайных аберраций

Содержание

1 Усредненные характеристики оптической системы

1.1 Оптическая передаточная функция

Оптическая передаточная функция (ОПФ):

$$G(\xi) = \int R(\mathbf{r} - \frac{\xi}{2})R(\mathbf{r} + \frac{\xi}{2})\exp\{j[\varphi(\mathbf{r} - \frac{\xi}{2}) - \varphi(\mathbf{r} + \frac{\xi}{2})]\}d^2r. \tag{1}$$

Учтем, что для нормальной случайной величины x:

$$\langle \mathrm{e}^{jx} \rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma_x^2} \tag{2}$$

Если фаза φ — однородный случайный процесс, и D зависит только от модуля разности аргументов, то в этом случае

$$\langle G(\xi) \rangle = G_0(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}D(\xi)} \tag{3}$$

где $G_0(\xi) = L(\xi/2a)$ — ОПФ системы без аберраций.

1.2 Число Штреля

Число Штреля

$$R_S = \frac{1}{S} \int L\left(\frac{\xi}{2a}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}D(\xi)} d^2\xi \tag{4}$$

в общем случае считается численно. Если в пределах апертуры $D(\xi)$ достаточно мало, то можно использовать приближение:

$$R_S \approx \mathrm{e}^{-\langle \varepsilon^2 \rangle}. \tag{5}$$

2 Разложение ВФ по ортогональным функциям

2.1 Общие положения

Представим фазу волны в виде разложения:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t) \varphi_i(\mathbf{r}), \tag{6}$$

где $a_i(t)$ — коэффициенты аберраций, $\varphi_i(\mathbf{r})$ — базисные функции "аберраций". Условие ортонормированности:

$$\int\limits_S \varphi_i(\mathbf{r}) \varphi_k(\mathbf{r}) d^2r = S\delta_{ik}, \qquad \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \tag{7}$$

Здесь S — площадь приемной апертуры. Другая запись:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(\mathbf{r}) \varphi_i(\mathbf{r}) \varphi_k(\mathbf{r}) d^2r = S\delta_{ik}, \tag{8}$$

R — функция зрачка. Из (6,7) следует выражение для a_i :

$$a_i(t) = \frac{1}{S} \int\limits_S \Phi(\mathbf{r}, t) \varphi_i(\mathbf{r}) d^2r. \tag{9}$$

2.2 Полиномы Цернике

Можно использовать различные системы функций, например, полиномы Цернике, ортогональные в круге:

№	Декартовы координаты	Полярные координаты	Описание
0	1	1	Постоянная фаза
1	x	$r\cos\varphi$	Наклон ВФ по оси
2	y	$r\sin\varphi$	Наклон ВФ по оси Y
3	$x^2 + y^2 - 1/2$	$r^2 - 1/2$	Дефокусировка
4	$x^2 - y^2 - 1/2$	$r^2\cos 2\varphi$	Астигматизм 1
5	$2xy$	$r^2\sin 2\varphi$	Астигматизм 2
6	и т.д. ...		

В приведенных формулах опущены нормировочные множители. В последующих формулах под $\varphi_i(\mathbf{r})$ не обязательно подразумеваются полиномы Цернике, однако считается, что они удовлетворяют условию (7) и $\varphi_0(\mathbf{r}) = 1$.

3 Статистика аберрационных коэффициентов

3.1 Корреляционная и структурная функции

Будем считать, что фазовые флуктуации $\Phi(\mathbf{r})$ представляют собой нормальный (гауссов) случайный процесс. Для его описания достаточно вторых моментов: $\langle\Phi(\mathbf{r}')\Phi(\mathbf{r}'')\rangle = B(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')$. В случае статистически однородного поля:

$$B(\mathbf{r}',\mathbf{r}'') = B(|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|) = \sigma^2 K(|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|), \tag{10}$$

где $K(|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|)$ — нормированная корреляционная функция (коэффициент корреляции). Структурная функция фазы:

$$D_\Phi(\mathbf{r}',\mathbf{r}'') = \langle[\Phi(\mathbf{r}')-\Phi(\mathbf{r}'')]^2\rangle = 2\sigma^2[1-K(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')]. \tag{11}$$

Если обе функции D и K существуют. Структурная функция позволяет описать более широкий класс флуктуаций, чем $K(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')$, и широко используется в атмосферной оптике.

3.2 Корреляции аберрационных коэффициентов

Найдем корреляционную матрицу аберрационных коэффициентов:

$$\alpha_{ik} = \langle a_i a_k\rangle = \frac{\sigma^2}{S^2}\int\limits_S K(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\varphi_i(\mathbf{r}')\varphi_k(\mathbf{r}'')d^2r'd^2r''. \tag{12}$$

Используя (11), получим:

$$\begin{cases} \alpha_{ik} = \frac{1}{2S^2}\int\limits_S D(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\varphi_i(\mathbf{r}')\varphi_k(\mathbf{r}'')d^2r'd^2r'', \quad i,k\neq 0; \\ \alpha_{00} = \sigma^2 - \frac{1}{2S^2}\int\limits_S D(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')d^2r'd^2r''. \end{cases} \tag{13}$$

3.3 Дисперсия фазы на апертуре

Найдем среднее по апертуре отклонение фазы от среднего значения:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{S}\int\limits_S (\varphi(\mathbf{r})-\bar\varphi)\,dS = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2, \qquad \bar\varphi = \frac{1}{S}\int\limits_S \varphi(\mathbf{r})dS. \tag{14}$$

Это следует из свойства (1) и формулы (2). После усреднения по множеству получим:

$$\langle\varepsilon^2\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{ii}^2 \tag{15}$$

Учитывая, что $\sigma^2 = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \alpha_{ii}^2$, и выражение (13) для α_{00}, получим полезное соотношение:

$$\frac{1}{2S^2} \int\limits_S D(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') d^2r' d^2r'' = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ii}^2 = \langle \varepsilon^2 \rangle \tag{16}$$

4 Задания по Лекции 7

1. Вывести формулу (11)

5 Вопросы по Лекции 7

1. ?

Список литературы

1. Воронцов М.А., Шмальгаузен В. И. Принципы адаптивной оптики, М.: Наука, 1985, 288 с.

2. А.В. Токовинин. Учебное пособие по адаптивной оптике обсерватории Серро Тололо, `http://www.astronet.ru/db/msg/1205112/intro.html`