Лекция 2
Изображающие системы с линзой

Содержание

1 Идеальная линза и аберрации

1.1 Идеальная тонкая линза и ее свойства

Будем рассматривать линзу как тонкую фазовую пластинку — рис.1. Дополнительный фазовый сдвиг $\Delta\varphi = k\Delta l \quad (k = \frac{2\pi}{\lambda})$, где Δl — оптическая разность хода будет:

$$\begin{aligned} &\Delta l(\rho) = [\Delta - \delta(\rho)]n + \delta(\rho); \\ &\Delta\varphi = k[\Delta l(\rho) - \Delta l(0)] = -k\delta(\rho)(n-1) \approx -k(n-1)\tfrac{\rho^2}{2R} = -k\tfrac{\rho^2}{2f}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $f = R/(n-1)$ — фокусное расстояние линзы. (См. задание 1.)

Для реальной линзы соотношение (1) выполняется приближенно для некоторой области вблизи оптической оси. Под идеальной линзой будем понимать фазовую пластинку, для которой (1) выполняется точно при любых ρ.

Реальная линза отличается от идеальной как вносимым фазовым сдвигом, так и ограниченной апертурой. Для учета этого будем представлять реальную линзу как совокупность трех элементов: идеальной линзы, диафрагмы, описывающей реальную апертуру, и дополнительной фазовой пластинки, описывающей отклонение фазовой функции линзы от (1) – аберрации линзы.

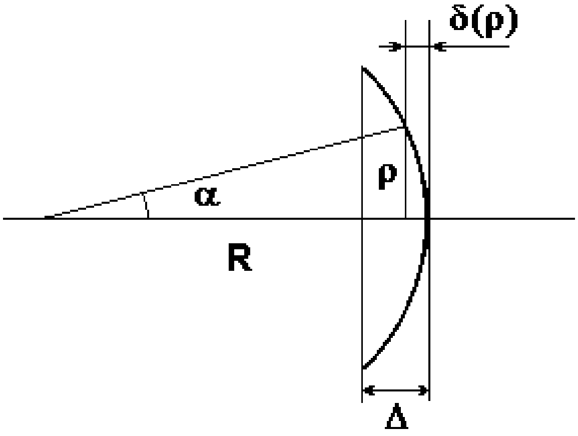

Рис. 1: К вычислению фазового набега в тонкой линзе.

1.2 Причины аберраций

Причины аберраций в оптической системе:

- несовершенство линз;
- неоднородность среды распространения;
- присутствие других оптических элементов.

Если искажения малы, они могут быть пересчитаны к плоскости линзы с помощью обобщенного принципа Гюйгенса-Френеля — интегрированием вдоль лучей, построенных по правилам геометрической оптики.

1.3 Поле в фокальной плоскости линзы

После линзы комплексная амплитуда поля приобретает множитель $\exp[-jk\rho^2/2f]$. Используя это свойство, ф-лу (1.3) и приближение Френеля (1.13), можно получить выражение для поля в фокальной плоскости линзы (рис.2), зная комплексную амплитуду непосредственно перед линзой:

$$U_2(\vec{\rho_2}) = C\exp[jk\frac{\rho_2^2}{2z}]\int\limits_A U_1(\vec{\rho_1})\exp[-jk\frac{\rho_1\rho_2}{z}]d^2\rho_1 \tag{2}$$

(получить самостоятельно). Введем апертурную функцию линзы (функцию зрачка)

$$R(\rho) = \begin{cases} 1, & |\rho| \le a, \\ 0, & |\rho| > a. \end{cases} \tag{3}$$

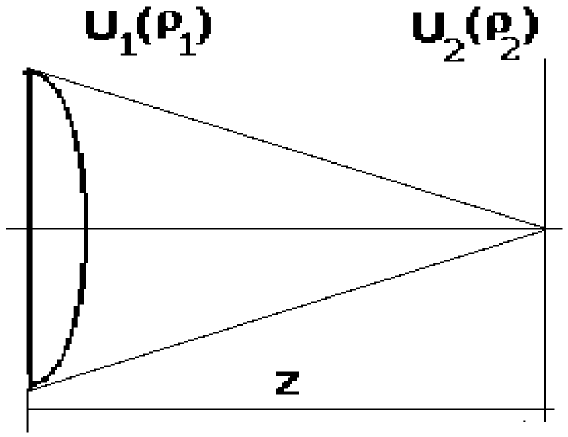

Рис. 2: К вычислению поля в фокальной плоскости линзы.

Представим (2) в виде:

$$U_2(\vec{\rho_2}) = C\exp[jk\frac{\rho_2^2}{2z}]\int U_1(\vec{\rho_1})R(\vec{\rho_1})\exp[-j\vec{\varkappa}\vec{\rho1}]d^2\rho_1, \quad \text{где} \quad \vec{\varkappa} = \frac{k\vec{\rho_2}}{z}. \tag{4}$$

Таким образом, поле в фокальной плоскости представляет собой спектр Фурье входного поля в пределах апертурной диафрагмы с фазовым множителем (перед интегралом), зависящим от точки наблюдения и в некотором масштабе, зависящим от фокусного расстояния z. Фазовый множитель можно устранить, помещая непосредственно перед выходной плоскостью вторую линзу, идентичную первой.

Ф-ла (4) м.б. также получена на основании физических представлений о разложении входного поля в спектр по плоским волнам.

1.4 Обобщенная функция зрачка

Аберрации линзы можно включить в функцию зрачка R:

$$\tilde{R}(\rho) = \begin{cases} \exp[j\varphi(\rho_1)], & |\rho| \le a, \\ 0, & |\rho| > a. \end{cases} \tag{5}$$

где $\tilde{R}(\rho)$ — обобщенная функция зрачка, $\varphi(\rho_1)$ — аберрации линзы или других элементов, пересчитанные к плоскости линзы.

2 Простейшая изображающая система

2.1 Пример простейшей системы

Рассмотрим простейшую систему $4f$, строящую изображение плоскости 1 в плоскость 2 с единичным увеличением. Получим описание этой системы из физических соображений.

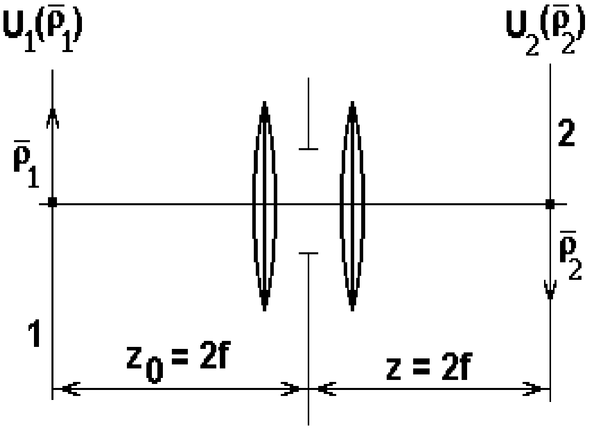

Рис. 3: Модель линзы с ограниченной апертурой

2.2 Физический смысл ф-ции $h(\zeta)$

Вспомним:

$$U_2(\vec{\rho_2}) = \int U_1(\vec{\rho_1}) h(\vec{\rho_2} - \vec{\rho_1}) d^2\rho_1. \tag{6}$$

Пусть $U_1(\vec{\rho_1}) = \delta(\vec{\rho_1})$ — точечный когерентный источник (возможно ли такое и законна ли эта идеализация?) тогда $U_2(\vec{\rho_2}) = h(\vec{\rho_2})$, т.е. $h(\zeta)$ имеет смысл распределения поля в изображении точечного источника.

2.3 Функция отклика изображающей системы

Представим линзу с апертурой a и фокусным расстоянием f как совокупность трех элементов (рис.3): идеальной линзы $2f$, следующей за ней диафрагмы с ф-цией $R(z)$ (без аберраций) и еще одной идеальной линзы $2f$. Поместим точечный источник в плоскости 1 на оси системы. Тогда после первой линзы получим плоскую волну, освещающую диафрагму, а перед второй линзой – однородное поле в пределах круга радиуса a. Применяя к этой линзе свойство (4), получим, что поле в выходной плоскости представляет собой в некотором масштабе Фурье–образ диафрагмы. Следовательно:

$$h(\zeta) = \mathfrak{F}(R(\rho_1)) \tag{7}$$

Так как система переворачивает изображение, направим оси $\vec{\rho_1}$ и $\vec{\rho_2}$ в разные стороны. Формально преобразование $U_1(\vec{\rho_1}) \to U_2(\vec{\rho_2})$ м.б. получено последовательным применением ф-лы (1.3) в приближении Френеля и использованием фазовой ф-ции линзы с апертурой a. (рекомендуется для самостоятельного упражнения). Проделав необходимые преобразования, получим:

$$h'(\vec{\rho_1}, \vec{\rho_2}) = \exp^{\frac{jk}{2f}(\vec{\rho_1}^2 + \vec{\rho_2}^2)} h(\vec{\rho_2} - \vec{\rho_1}) \tag{8}$$

где функция h соответствует формуле (7), полученной ранее из физических соображений. Первый множитель в (8) не выражается через разность $\vec{\xi} = \vec{\rho_2} - \vec{\rho_1}$ и описывает отклонение системы от изопланатизма. Так как в нашем примере

$\vec{\rho_2} \approx \vec{\rho_1}$, то этот множитель близок к единице, если $\frac{k}{f}\vec{\rho_1}^2 \lesssim 1$. Последнее неравенство определяет область изопланатизма, в которой выполняется равенство (7).

3 Передаточная функция и аберрации

3.1 Передаточная функция дифракционно-ограниченной системы

Так как $\mathbf{H}(\varkappa) = \mathfrak{F}(h(r))$, то на основании (4) $\mathbf{H}(\varkappa) \sim R(\rho)$, или, с учетом масштаба пространственных частот

$$\mathbf{H}(\varkappa) = R(\varkappa\frac{z}{k}), \quad \text{в нашем случае} \quad z = 2f. \tag{9}$$

Это – передаточная функция когерентной дифракционно-ограниченной системы. Система пропускает без искажений все пространственные частоты вплоть до частоты $\varkappa_0 = \frac{ka}{z}$, а частоты выше $\varkappa_0$ полностью подавляются.

3.2 Передаточная функция системы с аберрациями

В присутствии аберраций

$$\mathbf{H}(\varkappa) = \tilde{R}(\varkappa\frac{z}{k}) \tag{10}$$

на основании совершенно аналогичных рассуждений. Импульсную реакцию (весовую функцию системы) можно получить, преобразовав $\tilde{R}$ по Фурье. В системе без аберраций Фурье-образ диафрагмы совпадает с картиной дифракции Фраунгофера на апертуре линзы. Выражения (7), (9) и вытекающие из них формулы для $h(r)$ справедливы лишь в области изопланатизма системы.

3.3 Роль фазовых множителей

Используя физическую интерпретацию приведенных выше формул, следует помнить, что в когерентной оптике функции $h(r)$ и $\mathbf{H}(\varkappa)$ — вообще говоря, комплексные, в то время как из наблюдения фокального пятна линзы мы можем определить лишь модуль этих функций. Возникающие при оптическом преобразовании Фурье фазовые множители, в ряде случаев несущественные, иногда играют важную роль и должны быть учтены.

4 Задания по Лекции 2

1. Получить формулу (1), считая $\rho \ll R$.
2. Получить преобразование $U_1(\vec{\rho_1}) \to U_2(\vec{\rho_2})$ последовательным применением ф-лы (3) в приближении Френеля и использованием фазовой ф-ции линзы с апертурой a.
3. Получить преобразование $U_1(\vec{\rho_1}) \to U_2(\vec{\rho_2})$ для системы, входная и выходная плоскости которой расположены симметрично относительно линзы на расстоянии F от нее.

5 Вопросы по Лекции 2

1. Может ли существовать точечный когерентный источник, и когда законна подобная идеализация?

Список литературы

1. Воронцов М.А., Шмальгаузен В. И. Принципы адаптивной оптики, М.: Наука, 1985, 288 с.

2. А.В. Токовинин. Учебное пособие по адаптивной оптике обсерватории Сьерро Тololo, `http://www.astronet.ru/db/msg/1205112/intro.html`

3. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику, М: Мир, 1970.