

Лекция 12

Системы апертурного зондирования

Содержание

1 Сравнение АОС фазового сопряжения и апертурного зондирования	1
2 Критерии качества	1
3 Градиентные методы оптимизации	3
3.1 Метод наискорейшего спуска	3
3.2 Стохастическая оптимизация	4
4 Многоканальная модуляция	4
5 Проблема локальных экстремумов	6
6 Последовательность настройки	6
7 Задания по Лекции 12	7
8 Вопросы по Лекции 12	7

1 Сравнение АОС фазового сопряжения и апертурного зондирования

Системы фазового сопряжения содержат ДВФ, измеряющий вектор градиентов ВФ, цель работы системы — свести к нулю разность $\varphi(\mathbf{r}, t) - u(\mathbf{r}, t)$ ($\varphi(\mathbf{r}, t)$ — входные искажения фазы, $u(\mathbf{r}, t)$ — фаза, вносимая корректором) за время Δt , меньшее чем характерное время t_φ «замороженности» искажений $\varphi(\mathbf{r}, t)$. Системы апертурного зондирования содержат измеритель скалярной величины J — критерия качества работы АОС, цель функционирования системы — достижение глобального максимума критерия J за время $\Delta t < t_\varphi$.

2 Критерии качества

Используемые критерии качества работы адаптивных систем:

корректора из трех одинаковых субапертур, критерий – интенсивность на мишени (см рис.2) → все субапертуры не могут быть настроены последовательно за один цикл.

3 Градиентные методы оптимизации

Критерий качества J является функционалом как от входных фазовых искажений $\varphi(\mathbf{r}, t)$, так и вносимой коррекции $u(\mathbf{r}, t)$:

$$J = J[u] = J[\mathbf{a}], \quad u(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) S_i(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Приращение функционала в т. $\mathbf{a} + \mathbf{h}$:

$$\Delta J = J[\mathbf{a} + \mathbf{h}] - J[\mathbf{a}] = \sum_{i=1}^N J'_i[\mathbf{a}] h_i + o(\mathbf{h}, \mathbf{a}). \quad (3)$$

$\{J'_i(\mathbf{a})\}$ — компоненты вектора градиента \vec{J}_a . Градиент \vec{J}_a — направление наискорейшего возрастания в т. \mathbf{a} .

3.1 Метод наискорейшего спуска

«Движение» по координатам \mathbf{a} :

$$a_{n+1,i} = a_{n,i} + \alpha_{n,i} J'_i[\mathbf{a}_n] \quad \text{— метод наискорейшего спуска.} \quad (4)$$

Для каждого «шага» (4) по направлению градиента необходимо сделать N «пробных» шагов для приближенного измерения компонент градиента:

$$J'_i[\mathbf{a}_n] \approx (J[a_{n,i} + h_i] - J[a_{n,i}]) / h_i \quad (5)$$

Непрерывный аналог – движение по «минимизирующим траекториям» $\mathbf{a}(t)$:

$$a_{n,i} = a_i(t_n), \quad a_{n+1,i} = a_i(t_n + \Delta t) = a_i(t_n) + \beta_i(t_n) \Delta t \quad \rightarrow \frac{da_i}{dt} = \beta_i(t) J'_i[\mathbf{a}] \quad (6)$$

Возможны и более сложные уравнения для минимизирующих траекторий, например:

$$\frac{d^2 a_i}{dt^2} + \gamma_i \frac{da_i}{dt} + \beta_i J'_i[\mathbf{a}] = 0. \quad (7)$$

Другие методы: hill-climbing (последовательный по координатный спуск), симплекс-метод, стохастическая градиентная оптимизация, генетический метод и др.

3.2 Стохастическая градиентная оптимизация

Пусть компоненты $\{h_i\}$ пробного шага \mathbf{h} — случайные числа со следующими свойствами распределения:

$$\langle h_i \rangle = 0, \quad \langle h_i h_k \rangle = \sigma^2 \delta_{ik}, \quad \langle h_i h_k h_m \rangle = 0. \quad (8)$$

Разложим приращение ΔJ критерия в ряд Тэйлора, сохраняя члены до 2-го порядка включительно:

$$\Delta J = J(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - J(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^N J'_i(\mathbf{a}) h_i + \sum_{i,k=1}^N \frac{\partial^2 J}{\partial h_i \partial h_k} h_i h_k + o(|\mathbf{h}|^2, \mathbf{a}). \quad (9)$$

Домножим полученное разложение на h_n и усредним, тогда для среднего значения $\langle h_n \Delta J \rangle$ получим:

$$\langle h_n \Delta J \rangle = \sum_{i=1}^N J'_i(\mathbf{a}) \langle h_i h_n \rangle + \sum_{i,k=1}^N \frac{\partial^2 J}{\partial h_i \partial h_k} \langle h_i h_k h_n \rangle + \dots \approx J'_n(\mathbf{a}) \sigma^2. \quad (10)$$

Таким образом, произведение $h_n \Delta J$ позволяет «в среднем» вычислять значения всех компонентов градиента за один шаг.

4 Многоканальная фазовая модуляция

Пример — фокусировка когерентного изл-я на мишень с помощью составного корректора из N одинаковых субапертур, критерий — средняя по времени интенсивность на мишени. Комплексная амплитуда поля на мишени:

$$\Psi = A \sum_{n=1}^N \exp(j\varphi_n) \quad (11)$$

Фаза излучения в n -м канале:

$$\varphi_n = \alpha_n + u_n + a \sin \omega_n t, \quad (12)$$

где α_n — возмущение фазового профиля в n -м канале, которое необходимо скорректировать, u_n — управление, вводимое с целью коррекции, a и ω_n — амплитуда и частота пробного возмущения (все ω_n — разные). Интенсивность на мишени:

$$I = |\Psi|^2 = A^2 \left| N + \sum_{n \neq k} \cos(\varphi_n - \varphi_k) \right| \quad (13)$$

Введем фазовую ошибку n -го канала $\beta_n = \alpha_n + u_n$, тогда

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_n - \varphi_k) &= \cos[(\beta_n - \beta_k) + a(\sin \omega_n - \sin \omega_k)] = \\ &= \cos(\beta_n - \beta_k) \cos[a(\sin \omega_n - \sin \omega_k)] - \sin(\beta_n - \beta_k) \sin[a(\sin \omega_n - \sin \omega_k)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Для интенсивности на мишени получим, оставляя лишь члены с первыми и вторыми гармониками и опуская более высокие гармоники и комбинационные частоты:

$$\begin{aligned}
 I = |\Psi|^2 = A^2 & \left[N + J_0^2(a) \sum_{n \neq k}^N \cos(\beta_n - \beta_k) \right] - \\
 & - 4A^2 J_0(a) J_1(a) \sum_{n \neq k}^N \sin \omega_n t \sin(\beta_n - \beta_k) + \\
 & + 4A^2 J_0(a) J_2(a) \sum_{n \neq k}^N \cos \omega_n t \cos(\beta_n - \beta_k).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Первое слагаемое в (15) описывает среднюю по времени интенсивность излучения в присутствии фазовой модуляции (т.е. критерий качества работы системы):

$$J = A^2 \left[N + J_0^2(a) \sum_{n \neq k}^N \cos(\beta_n - \beta_k) \right] \tag{16}$$

Максимальное значение $J = J_0$ достигается при идеальной настройке системы (все $\beta_n = 0$):

$$J = A^2 N [1 + J_0^2(a)(N - 1)]. \tag{17}$$

При $a \rightarrow 0$ и при правильной настройке корректора значение критерия стремится к своему максимално возможному значению $J_{max} = A^2 N^2$, однако слишком малой делать амплитуду a нельзя — возрастут остаточные значения β_n .

Найдем производные средней интенсивности по переменным управления u_n . Для этого используем ф-лу (13), положив $\alpha_n = 0$. При этом $\varphi_n = \beta_n$ и $\partial/\partial u_n = \partial/\partial \beta_n$, поэтому

$$J'_n = \frac{\partial J}{\partial \beta_n} = -2A^2 \sum_{k=1}^N \sin(\beta_n - \beta_k). \tag{18}$$

Сравнивая полученную ф-лу с членом выражения (15), содержащим гармонику с частотой ω_n , видим, что коэффициент при $\sin \omega_n t$ отличается от (18) лишь постоянным множителем:

$$\begin{aligned}
 B_n &= -4A^2 J_0(a) J_1(a) \sum_{k=1}^N \sin(\beta_n - \beta_k) \\
 B_n &= 2J_0(a) J_1(a) J'_n.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Т.о. для определения производной J'_n в процессе работы системы достаточно измерить амплитуду соответствующей гармоники критерия. Синхронное детектирование. При малой амплитуде a значения коэффициентов B_n малы и измерение производных затруднено.

Отметим типичную особенность многоканальной фазовой модуляции: производные J'_n зависят не только от ошибки по n -ой координате β_n , но и от всех других ошибок β_k . \Rightarrow Чем больше число N субапертур (каналов управления), тем труднее выделять производные J'_n (+ сложность выбора частот ω_n модуляции). Синусно-косинусная модуляция.

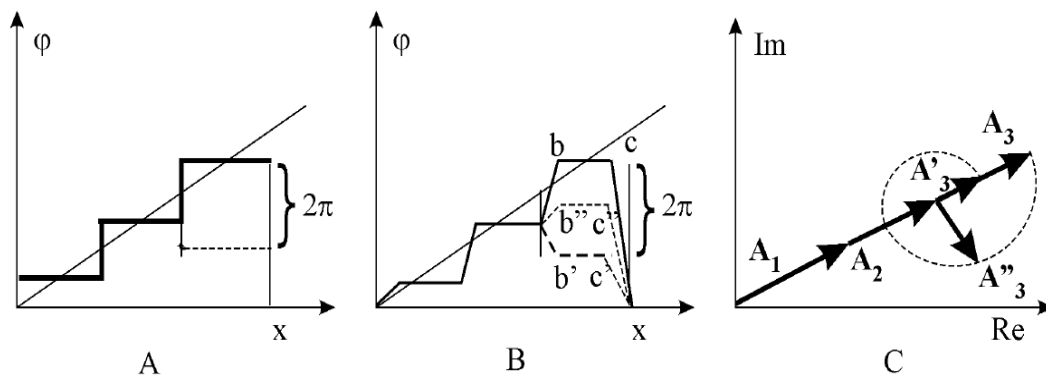


Рис. 3: Проблема локальных экстремумов

5 Проблема локальных экстремумов

Сравним работу 3-элементного зеркала с поршневыми субапертурами и зеркала, у которого каждый привод создает локальную деформацию в виде трапеции — рис.3. В случае поршневого корректора побочные максимумы также существуют, но все они имеют одинаковую высоту, и при организации управления достаточно найти любой. Для второго корректора их высоты различны, и для хорошей работы необходимо найти самый высокий – глобальный – максимум.

6 Последовательность настройки при модальном управлении

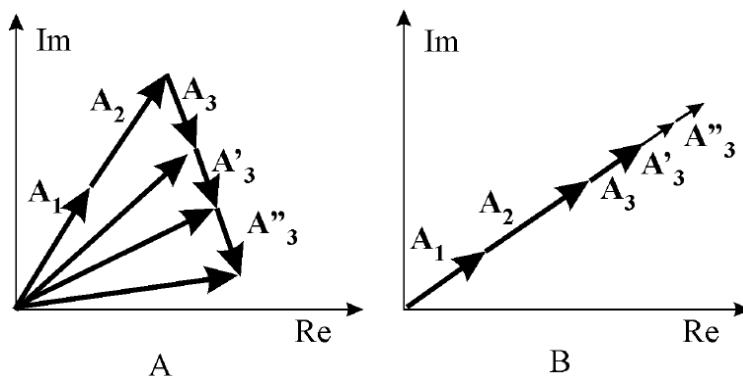


Рис. 4: Пример настройки АОС апертурного зондирования

Пусть управляемое зеркало состоит из трех субапертур, управляемых по положению и наклону. В таком зеркале положения элементов влияют только на направления векторов на диаграмме, а наклоны – только на их длины. Если 3-я субапертура неправильно настроена по положению, попытки настроить ее по углу не приводят к успеху (рис. 4 а). Если все субапертуры настроены по положению (сфазированы), дальнейшая настройка по углам — максимизация длин векторов — уже не вызовет ошибок в управлении. → **В модальном корректоре различные степени свободы могут быть неравноправны и должны настраиваться в определенной последовательности.**

7 Задания по Лекции 12

1. Предполагая, что система стартует из одной точки в пространстве $\{a_i\}$, оцените дисперсию разности состояний АОС апертурного зондирования, достигаемых в результате одного шага при «честном» измерении градиента и «стохастическом» методе измерения.
2. Выведите ф-лу (15) и объясните, почему можно пренебречь теми или иными членами разложения по гармоникам.

8 Вопросы по Лекции 12

1. Чем отличаются АОС фазового сопряжения и апертурного зондирования? Сравните их преимущества и недостатки.
2. Какие критерии качества работы адаптивных систем Вы знаете и к чему должна приводить их оптимизация?
3. Расскажите сущность одного из методов оптимизации критерия качества: наискорейшего спуска, стохастического градиентного или «восхождения на холм». Сравните их по быстродействию.
4. Сущность многоканальной фазовой модуляции и проблемы ее реализации.
5. В чем (качественно) заключается проблема локальных экстремумов.
6. Последовательность настройки при модальном управлении.

Вспомогательные формулы

$$\begin{aligned}\cos(z \sin \theta) &= J_0(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(z) \cos(2k\theta) \\ \sin(z \sin \theta) &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(z) \sin[(2k+1)\theta] \\ \cos(z \cos \theta) &= J_0(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(z) \cos(2k\theta) \\ \sin(z \cos \theta) &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(z) \sin[(2k+1)\theta]\end{aligned}$$

Список литературы

1. Воронцов М.А., Шмальгаузен В. И. Принципы адаптивной оптики, М.: Наука, 1985, 288 с.